



超导电动悬浮系统等效参数计算的 强迫振动法研究

苏晓蕾¹, 刘耀宗^{1, 2, 3}, 熊登宇¹, 曾启瑾¹

(1. 国防科技大学 智能科学学院, 湖南 长沙 410073;

2. 国防科技大学 电磁悬浮与推进技术湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410073;

3. 高速磁浮技术装备铁路行业工程研究中心, 山东 青岛 266111)

摘要: 针对由车载超导线圈与地面零磁通线圈相互作用构成的、具有强非线性机-电-磁耦合特性的超导电动悬浮系统, 通常采用工作点附近等效线性振子的方法, 以等效刚度、等效阻尼、固有频率等特征参数进行动力学分析与评估。强迫振动法是计算这些等效参数的常用方法, 但在应用于该电动悬浮系统时, 存在计算结果随速度异常变化、激励参数变化导致结果不稳定等问题, 影响计算精度与可重复性。为研究上述问题的机理, 文章结合场-路-运动耦合仿真模型, 分析了地面离散分布的零磁通线圈引起电磁力纹波, 以及激励参数、工作点选取对等效参数计算结果的影响, 进而提出一种改进的强迫振动法。仿真结果表明, 改进的强迫振动法能够有效抑制等效参数随速度变化出现的异常突变, 使计算结果更加稳定、可重复, 为该类系统的局部线性化特征参数提取与特性分析提供参考。

关键词: 超导电动悬浮; 等效刚度/阻尼; 强迫振动法; 悬浮力波动; 相位匹配

中图分类号: U237; U266.4

文献标志码: A

文章编号: 1000-128X(2026)02-0042-09

0 引言

超导电动悬浮 (electrodynamic suspension, EDS) 系统依靠快速运动的车载超导线圈 (superconducting coil, SC) 与地面轨道固定导体之间的互感耦合产生悬浮力与导向力, 从而实现非接触支承与稳定导向^[1-3], 其中地面导体分为连续导体板和离散零磁通线圈 (null-flux coil, NFC) 两种形式, 本文将研究超导磁体与离散零磁通线圈耦合的超导电动悬浮系统 (简称为 SC-NFC-EDS)。由于 SC 与 NFC 之间的电磁力与其相对位姿、相对速度存在强非线性关联, 该系统表现为机-电-磁多场耦合的强非线性特性。为便于分析与评估 SC-NFC-EDS 系统特性, 通常在给定速度下将系统在工作点附近进行线性化, 提取等效刚度、等效阻尼、阻尼比及固有频率等特征参数^[4-5]。

强迫振动法是求解该类系统等效特征参数的常用方法, 具有实现简便、无需自由衰减段、适用于负阻尼/自激工况等优点, 因此在特征参数计算中被广泛采用^[6-7]。其基本思路为: 在给定运行速度 v 下, 将系统其余自由度锁定于平衡点附近, 仅对目标自由度 (横向 y /垂向 z) 施加设定的简谐位移; 随后根据已知的位移/速度与电磁力对应关系, 将该速度点处的电磁力等效为线性弹簧阻尼力, 从而反推得到等效刚度与等效阻尼。

在 SC-NFC-EDS 系统中, 文献[8]基于刚体假设和场-路-运动耦合模型, 研究了超导 EDS 系统的自由振动与强迫振动特性, 并依据单周期能量关系评价了系统阻尼。然而, 结果表明, 不同激励幅值与频率下的阻尼曲线并不完全一致, 说明传统强迫振动法的计算结果受激励参数选取的影响。因此, 若在全速度范围内固定采用同一组激励幅值、激励频率和工作点, 等效

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52572426)

通信作者: 刘耀宗, 男, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要从事磁悬浮动力学和控制方面研究; E-mail: yzliu@nudt.edu.cn

引用格式: 苏晓蕾, 刘耀宗, 熊登宇, 等. 超导电动悬浮系统等效参数计算的强迫振动法研究[J]. 机车电传动, 2026(2): 42-50. DOI:10.13890/j.issn.1000-128X.2026.02.005.

Citation: SU Xiaolei, LIU Yaozong, XIONG Dengyu, et al. Research on a forced vibration method for calculating equivalent parameters of superconducting electrodynamic suspension systems[J]. Electric drive for locomotives, 2026(2): 42-50. DOI:10.13890/j.issn.1000-128X.2026.02.005.

参数可能出现随速度异常跳变或结果不唯一的问题, 进而影响参数提取的稳定性和可重复性。

在 SC-NFC-EDS 系统中, 由于 NFC 阵列沿轨道离散排列, 车轨之间的电磁力除受气隙、姿态与速度影响外, 还随 SC 相对 NFC 的位置变化呈现周期性纹波特征。已有研究表明, 车辆沿导轨运动时, SC-NFC-EDS 系统中的电磁力会随车辆运动发生波动, 且波动幅值与线圈长度、相邻线圈间距以及 NFC 极距密切相关^[9-10]。本文将由离散 NFC 空间排布引起的、随车辆-轨道相对里程相位周期变化的确定性电磁力波动称为里程相位纹波。传统强迫振动法直接将在相邻强迫运动穿越平衡点时含里程纹波的电磁力等效为弹簧阻尼力, 从而引入了计算误差。本文主要工作与贡献如下:

①根据电磁力存在周期纹波的特点, 系统阐明强迫振动法计算等效刚度/阻尼参数时, 结果随速度变化出现不合理突变的原因。

②提出一种基于里程相位匹配的改进强迫振动法, 通过筛选轨道相位一致的配对点, 减小 NFC 空间纹波在差分计算中的残留, 提高等效参数提取的稳定性和可重复性。

③针对强迫振动法计算结果随参数 A 、 f 、 x_{eq} 设置不同而变化的现象, 设定随速度变化的参数选取原则, 确保在 SC-NFC-EDS 系统中等效参数计算结果的唯一性。

1 强迫振动法计算原理与存在问题分析

为表征 SC-NFC-EDS 系统在给定速度和工作点附近目标自由度上的局部动力学特性, 通常将其等效为该自由度上的线性单自由度弹簧阻尼振子。该方法通过约束其余自由度不变, 仅计算目标通道的等效刚度和阻尼系数, 用于描述在该自由度附近的局部线性化特征。

在给定速度 v 时, 对目标自由度施加小幅简谐位移以进行强迫振动, 见式(1)。

$$x(t) = x_{eq} + A \sin(\omega t) \quad (1)$$

式中: x_{eq} 为速度点对应的平衡位置; A 为激励幅值; ω 为激励角频率, $\omega = 2\pi f$ 。

在工作点邻域内, 将电磁力等效表示为线性弹簧-阻尼模型, 具体如下:

$$\tilde{F}_x(t) \approx -k_x(x(t) - x_{eq}) - c_x \dot{x}(t) \quad (2)$$

式中: $k_x \triangleq -\left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{eq}$, $c_x \triangleq -\left. \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right|_{eq}$ 分别为工作点处的局部等效刚度与等效阻尼。

在平衡位置处, 有 $x(t_i) = x_{eq}$, $t_i = \frac{i\pi}{\omega}$, i 为偶数时 $\dot{x}(t_{2k}) = \omega A$, i 为奇数时 $\dot{x}(t_{2k+1}) = -\omega A$ 。将它们代入式(2), 此时式(2)中仅保留阻尼力项, 可得

$$c_x \approx \frac{\tilde{F}_x\left(\frac{(2k+1)\pi}{\omega}\right) - \tilde{F}_x\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)}{2\omega A} \quad (3)$$

在位移极值点处 ($\dot{x}=0$), 令 $t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(i+\frac{1}{2})\pi}{\omega}$, 则有

$$\dot{x}(t_{i+\frac{1}{2}}) = 0, \Delta x(t) \triangleq x(t) - x_{eq}, \quad \Delta x(t_{2k+\frac{1}{2}}) = A, \quad \Delta x(t_{2k+\frac{3}{2}}) = -A, \quad \text{将它们代入式(2)可得}$$

$$k_x \approx \frac{\tilde{F}_x\left(\frac{(2k+\frac{3}{2})\pi}{\omega}\right) - \tilde{F}_x\left(\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{\omega}\right)}{2A} \quad (4)$$

进一步, 将目标自由度在工作点邻域内的局部动力学等效为单自由度二阶系统, 具体如下:

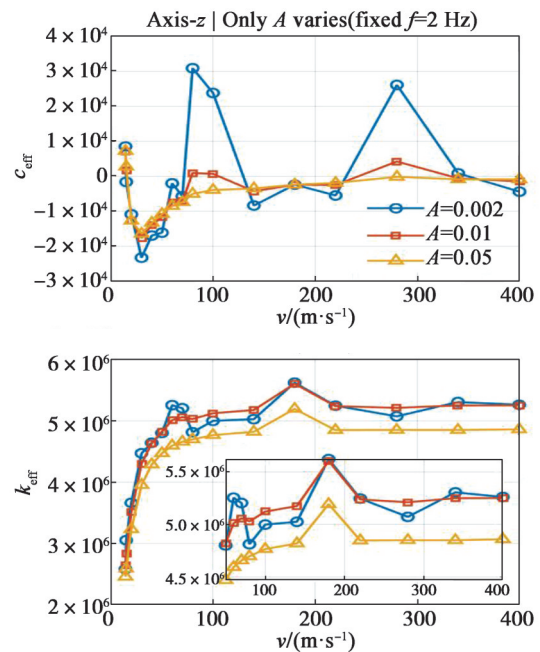
$$m_{eff} \Delta \ddot{x} + c_x \Delta \dot{x} + k_x \Delta x = 0 \quad (5)$$

式中: m_{eff} 为目标自由度的等效质量; $\Delta x = x - x_{eq}$, 为目标自由度相对于工作点 x_{eq} 的位移扰动; $\Delta \dot{x}$ 和 $\Delta \ddot{x}$ 分别为该位移扰动对应的速度扰动和加速度扰动。

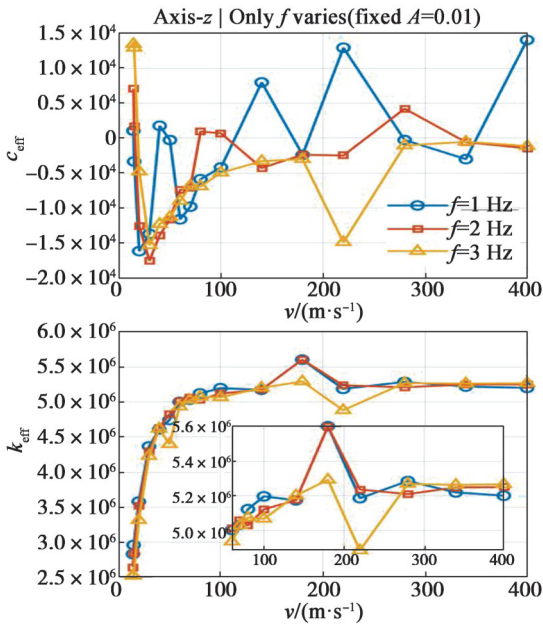
根据上述分析得到其固有频率 ω_n 与阻尼比 ζ 的计算如式(6)。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_x}{m_{eff}}}, \zeta = \frac{c_x}{2m_{eff}\omega_n} \quad (6)$$

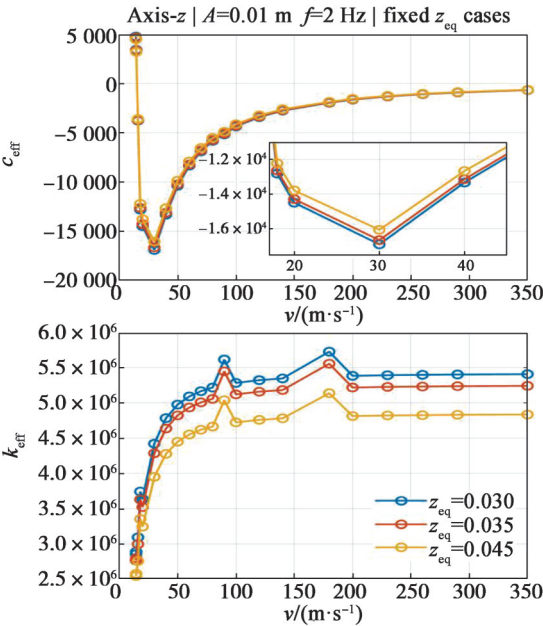
强迫振动法应用于 SC-NFC-EDS 系统时主要存在两类问题: 一是等效刚度/阻尼随速度变化出现不合理突变, 二是计算结果依赖于工作点 x_{eq} 、激励幅值 A 、频率 f , 如图1所示。其成因可归结为两方面: 第一, 电磁力包含平均项和纹波项, 其中后者由 SC 与 NFC 的里程相位决定。若差分计算中两组采样点对应不同里程相位, 纹波项无法相互抵消, 等效刚度/阻尼中便叠加了相位不一致误差, 该误差经分母放大后



(a) 固定频率 f 和平衡点 x_{eq} , 改变 A



(b) 固定振幅 A 和平衡点 x_{eq} , 改变 f



(c) 固定振幅 A 和频率 f , 改变 x_{eq}

图1 传统强迫振动法取不同 x_{eq} 、 A 、 f 计算的 z 向等效刚度/阻尼系数随速度变化曲线

Fig. 1 Speed-dependent variations in z -direction equivalent stiffness/damping coefficient for different x_{eq} , A , and f values from the conventional forced vibration method

可能表现为速度曲线上的异常尖峰。第二，强迫振动法本质是在给定工作点附近进行线性化提取，如果所取 x_{eq} 偏离真实静平衡位置，则线性化区间将围绕偏置点展开，局部等效斜率（等效刚度/阻尼）将发生系统性漂移；同时 A 与 f 影响差分量变化，使得不同的 x_{eq} 、 A 、 f 组合会得到不同的等效参数结果，导致计算结果对参数设定高度敏感，削弱参数提取的稳定性和可重复性。

2 改进的强迫振动法

2.1 电动悬浮系统耦合建模

本文研究对象为电磁撬车，其左右两侧各布置 4 个 SC，轨道采用左右对称布置的交叉连接 NFC，SC 与 NFC 线圈的结构组成如图 2 所示，具体参数尺寸见表 1^[11]。

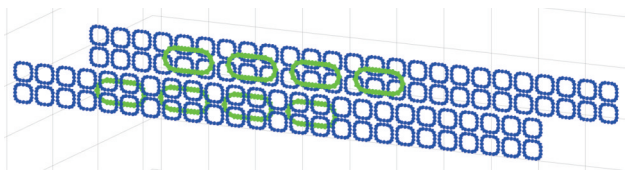


图2 电磁撬车-轨道离散线圈结构示意图
Fig. 2 Schematic diagram of electromagnetic sled and discrete track coil structure

表1 SC-NFC-EDS 系统线圈具体参数表

Table 1 Specific coil parameters of SC-NFC-EDS system

参数	地面零磁通线圈	超导线圈
横向长度/m	0.15	0.57
倒角/m	0.100	0.215
高度/m	0.14	0
截面高度/m	0.05	0.07
截面厚度/m	0.045	0.040
总匝数	24	1 400

SC-NFC-EDS 系统参数如表 2 所示。

表2 SC-NFC-EDS 系统参数

Table 2 Parameters of SC-NFC-EDS system

参数	取值
零磁通线圈自感 L_{self}/mH	0.282
零磁通线圈上下互感 M/mH	0.014 9
零磁通线圈电阻 $R/m\Omega$	7.6
零磁通线圈极距 r/m	0.45
超导线圈工作电流 I_s/A	500
超导线圈极距 r_{sc}/m	1.35
悬浮架质量 m/kg	20 000
车体侧滚转动惯量 $I_\phi/(kg \cdot m^2)$	16 470
车体点头转动惯量 $I_\theta/(kg \cdot m^2)$	47 000
车体摇头转动惯量 $I_\psi/(kg \cdot m^2)$	56 680
悬浮架长度 L/m	5.40
悬浮架宽度 W/m	2.98

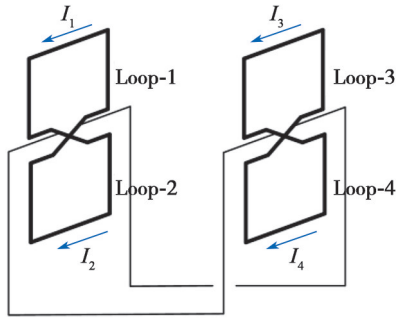
2.1.1 动态电路及电磁力计算

地面 NFC 可等效为由若干闭合回路组成的多回路耦合电路。车载 SC 以给定速度相对轨道运动，使 SC 与 NFC 之间的互感随相对位置变化，从而在 NFC 回路中产生感应电动势并形成回路电流^[11]。地面 NFC 线圈采用交叉连接形式时，其物理模型与等效电路如图 3 所示。4 个环路（左上，左下，右上，右下）分别定义环路电流 $I_1 \sim I_4$ ，每个环路包含电阻 R 、自感 L ，上下环路

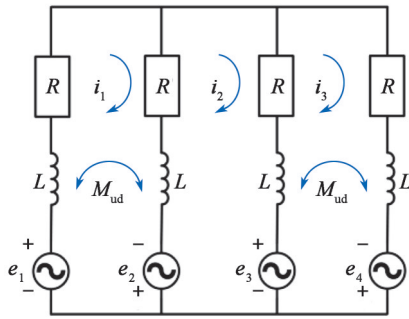
之间存在互感 M_{ud} , 同时由车载 SC 运动在各环路中感应出电动势 $e_1 \sim e_4$ 。

1) 电路状态方程

根据网孔电流分析方法, 将交叉连接的4条环路用3个网孔电流 (i_1, i_2, i_3) 表示。网孔电流和支路电流之间的关系如式(7)所示。



(a)交叉连接零磁通线圈物理模型



(b)交叉连接零磁通线圈等效电路

图3 交叉连接零磁通线圈的物理模型和等效电路图

Fig. 3 Physical model and equivalent circuit diagram of cross-connected null-flux coil

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据交叉连接零磁通线圈的等效电路, 将4个环路用3个网孔电流表示。设3网孔电流向量为 $i(t) = [i_1 \ i_2 \ i_3]^T$, 根据基尔霍夫电压定律, 可得到3网孔电流的耦合时域方程如式(8)。

$$\mathbf{L}i(t) + \mathbf{R}i(t) = \mathbf{e}(t) \quad (8)$$

其中, 3网孔的等效电阻矩阵 $\mathbf{R}$ 、等效电感矩阵 $\mathbf{L}$ 和等效感应电动势 $\mathbf{e}(t)$ 分别表示如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2R & -R & 0 \\ -R & 2R & -R \\ 0 & -R & 2R \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2(L + M_{ud}) & -(L + M_{ud}) & 0 \\ -(L + M_{ud}) & 2L & -(L + M_{ud}) \\ 0 & -(L + M_{ud}) & 2(L + M_{ud}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ -(e_2 + e_3) \\ e_3 + e_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

2) 感应电动势

设车载 SC 激励电流为 I_s , 第 k 个环路与 SC 的互感为 $M_k(q)$ (随系统广义位形 $q(t)$ 变化), 则该环路的磁链为

$$\lambda_k(t) = M_k(q(t)) I_s, k=1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

由法拉第电磁感应定律可得

$$e_k(t) = -\frac{d\lambda_k(t)}{dt} = -I_s \frac{dM_k(q(t))}{dt} = -I_s \sum_{j=1}^m \frac{\partial M_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (11)$$

式中: $M_k(q(t))$ 为第 k 个回路与 SC 之间互感; $\partial M_k / \partial q_j$ 为互感偏位移; $\dot{q}_j$ 为广义速度。

将4个环路汇总, 可表示为

$$\mathbf{e}_b(t) = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T = -I_s \mathbf{J}_M(q) \dot{\mathbf{q}}(t) = -I_s \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial q_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial M_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial M_n}{\partial q_m} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (12)$$

式中: $\mathbf{J}_M(q)$ 为互感矩阵对广义坐标的雅可比矩阵; m 为系统的自由度。

由式(9)与式(12)可进一步得到3网孔状态方程右端的等效电源项 $\mathbf{e}(t)$ 。

3) 电磁力 (能量法)

在电路状态方程求得3网孔电流 $i(t) = [i_1(t), i_2(t), i_3(t)]^T$ 后, 可进一步计算车载超导线圈所受电磁力。本文采用能量法求解电磁力。对交叉连接 NFC 单元, 4个环路电流为 $I_1 \sim I_4$, 相应 SC-NFC 互感记为 $M_1(q) \sim M_4(q)$ 。工程上常认为环路电感矩阵 $\mathbf{L}_b$ 随位形变化较弱 (忽略 $\frac{1}{2} \mathbf{I}_b^T \frac{\partial \mathbf{L}_b}{\partial (\cdot)} \mathbf{I}_b$ 项), 则与车载 SC 电流 I_s 相关的磁共能可表示为^[12-13]

$$W'(q) \approx I_s \sum_{k=1}^4 I_k(t) M_k(q) = I_s \mathbf{I}_b^T(t) \mathbf{M}(q) \quad (13)$$

式中: $\mathbf{I}_b(t) = [I_1(t), I_2(t), I_3(t), I_4(t)]^T$, $\mathbf{M}(q) = [M_1(q), M_2(q), M_3(q), M_4(q)]^T$ 。

根据虚功原理, 沿平动坐标 $j \in \{x, y, z\}$ 的电磁力为

$$f_j(q, t) = \frac{\partial W'(q)}{\partial q_j} \approx I_s \sum_{k=1}^4 I_k(t) \frac{\partial M_k(q)}{\partial q_j} \quad (14)$$

为避免与广义坐标的下标混淆, 上式中的 j 仅表示空间方向 x, y, z 。

由式(7)所示的环路电流与网孔电流关系, 可得

$$I_1 = i_1, I_2 = i_1 - i_2, I_3 = i_3 - i_2, I_4 = i_3 \quad (15)$$

将式(15)代入式(14), 即可得到基于网孔电流的电磁力显式表达式为

$$f_j \approx I_s \left[i_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_j} + \frac{\partial M_2}{\partial q_j} \right) - i_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_j} + \frac{\partial M_3}{\partial q_j} \right) + i_3 \left(\frac{\partial M_3}{\partial q_j} + \frac{\partial M_4}{\partial q_j} \right) \right] \quad (16)$$

定义左侧第 k 个车载超导线圈在方向 $j \in \{x, y, z\}$ 上

的电磁力为 f_{jk} ，右侧为 f_{rk} ($k=1,2,3,4$)。记左侧第 k 个超导线圈与左上、左下环路的互感分别为 $M_{11k}(\mathbf{q})$ 、 $M_{12k}(\mathbf{q})$ ，右侧第 k 个超导线圈与右上、右下环路的互感分别为 $M_{r3k}(\mathbf{q})$ 、 $M_{r4k}(\mathbf{q})$ 。则由式(14)可得

$$f_{lyk} \approx I_s (I_1 \frac{\partial M_{11k}}{\partial j} + I_2 \frac{\partial M_{12k}}{\partial j}), f_{ryk} \approx I_s (I_3 \frac{\partial M_{r3k}}{\partial j} + I_4 \frac{\partial M_{r4k}}{\partial j}) \quad (17)$$

将式(15)代入上式，即可将其表示为网孔电流形式，具体如下：

$$\begin{aligned} f_{lyk} &\approx I_s [i_1 (\frac{\partial M_{11k}}{\partial j} + \frac{\partial M_{12k}}{\partial j}) - i_2 \frac{\partial M_{12k}}{\partial j}], \\ f_{ryk} &\approx I_s [i_3 (\frac{\partial M_{r3k}}{\partial j} + \frac{\partial M_{r4k}}{\partial j}) - i_2 \frac{\partial M_{r3k}}{\partial j}] \end{aligned} \quad (18)$$

为验证本文动态电路模型的正确性，将仿真结果与日本山梨试验线公开测试数据^[13]中 151 km/h 和 298 km/h 两种速度工况下的电磁力计算结果进行对比，结果如图 4 所示。图 4 中黑色曲线为山梨试验线公开测试数据，红色曲线为本文仿真结果。由图 4 可知，在两种速度条件下，本文仿真结果与公开测试数据在波形变化趋势、峰值出现位置及整体幅值范围上均较为一致，图形能够较好反映电磁力的时域演化特征，局部差异主要体现在部分峰值幅值及细节波动上，这主要源于模型简化（如忽略强磁场环境下的三维边缘效应、低温恒温器与金属转向架等次级金属结构引起的涡流屏蔽及寄生耗散效应）、实际测量误差以及积分累积效应，但不影响对整体规律一致性的判断。总体而言，本文所建立的电磁力模型能较合理地描述 SC-NFC-EDS 系统的基本电磁载荷特征，可作为后续分析传统强迫振动法参数提取问题的数值模型基础。

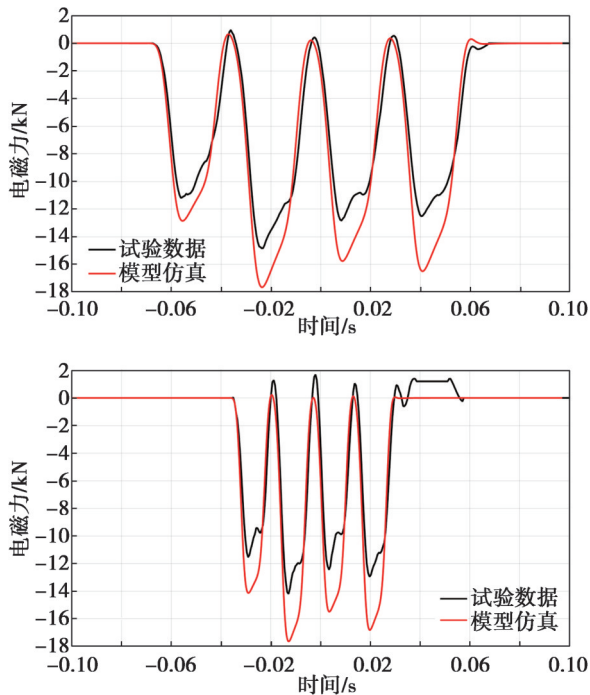


图 4 本文模型与山梨线公开数据的电磁力对比

Fig. 4 Comparison of electromagnetic force between the developed model and the public test data of Yamanashi line

2.1.2 刚体动力学模型

本文采用 FRD 坐标系 (front-right-down)，将橇车（含车载 SC 组件）视为刚体，橇车初始位于横向居中位置，沿前进方向做匀速直线运动。电磁橇车的受力情况如图 5 所示。图 5 中 ϕ 、 θ 、 ψ 分别表示电磁橇车的滚动角、俯仰角和偏航角。

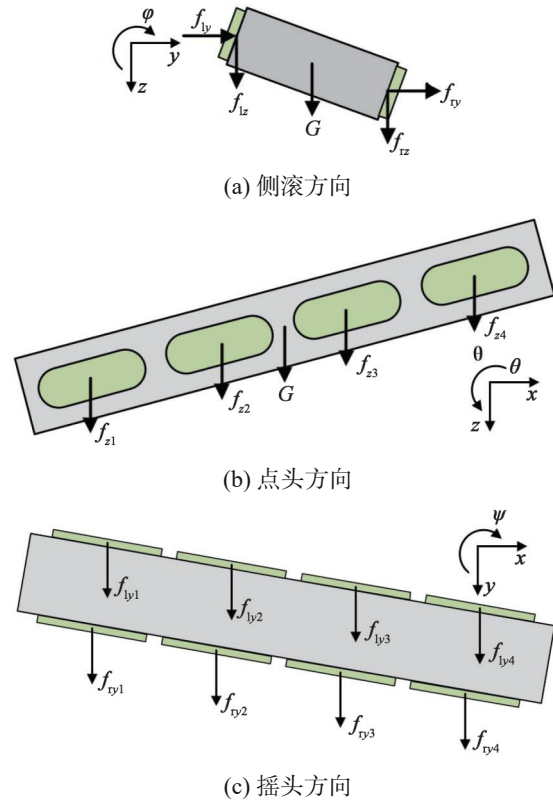


图 5 悬浮架受力示意图

Fig. 5 Schematic diagram of loading on levitation frame

下面建立橇车的耦合动力学模型，定义电磁力左右侧合力如下：

$$F_{Ly} = \sum_{k=1}^4 f_{lyk}, F_{Ry} = \sum_{k=1}^4 f_{ryk}, F_{Lz} = \sum_{k=1}^4 f_{lzk}, F_{Rz} = \sum_{k=1}^4 f_{rzk} \quad (19)$$

式中： F_{Ly} 和 F_{Ry} 分别为左侧、右侧 SC 线圈在 y 方向上的电磁合力； F_{Lz} 和 F_{Rz} 分别为左侧、右侧车载超导线圈在 z 方向上的电磁合力； k 表示每侧沿纵向布置的第 k 个车载超导线圈， $k=1,2,3,4$ 。

定义 4 个线圈在纵向的力臂分别为： $x_1 = -0.375L$, $x_2 = -0.125L$, $x_3 = 0.125L$, $x_4 = 0.375L$ ，则电磁橇车所受合力及合力矩可表示为：

$$\left. \begin{aligned} F_y &= F_{Ly} + F_{Ry} \\ F_z &= F_{Lz} + F_{Rz} + G \\ M_x &= \frac{W}{2} \left[(F_{Rz} - F_{Lz}) \cos \phi + (F_{Ly} - F_{Ry}) \sin \phi \right] \\ M_y &= -\cos \theta \left(\sum_{k=1}^4 (x_k f_{lzk}) + \sum_{k=1}^4 (x_k f_{rzk}) \right) \\ M_z &= \cos \psi \sum_{k=1}^4 x_k f_{lyk} + \sum_{k=1}^4 x_k f_{ryk} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中: G 为撬车重力; W 为悬浮架宽度; L 为悬浮架长度; x_k 为第 k 个车载超导线圈相对于撬车质心的纵向力臂。

最终一阶状态方程为

$$\dot{x}_j = v_j, \dot{v}_j = \begin{cases} F_y/m, & j=y \\ F_z/m, & j=z \\ M_x/I_\phi, & j=\phi \\ M_y/I_\theta, & j=\theta \\ M_z/I_\psi, & j=\psi \end{cases} \quad (21)$$

2.2 纹波对强迫振动法的影响机理

电磁力可概括为“平均分量”与“纹波分量”的叠加形式, 如图6所示。悬浮力的时间历程在缓慢变化的平均分量之上叠加了高频振荡。图6中对局部时段的放大进一步表明, 该高频振荡波形平滑且周期基本稳定, 对应于车辆沿轨道连续跨越离散NFC节距所引入的确定性空间周期效应, 车辆每经过一个NFC, 纹波重复一次。这一特征说明电磁力的波动主要来源于轨道线圈的离散结构。

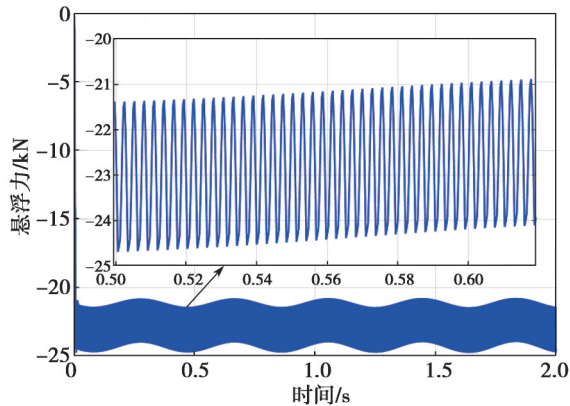


图6 SC-NFC-EDS系统中悬浮力的纹波示意图

Fig. 6 Schematic diagram of levitation force ripples in SC-NFC-EDS system

基于上述分析, 电磁力可表示为

$$F_x(h, \dot{h}, v, X) = \bar{F}_x(h, \dot{h}, v) + F_{\text{rip}}(h, v, X) + \varepsilon_{\text{num}} \quad (22)$$

式中: $\bar{F}_x$ 为电磁力的平均项; F_{rip} 为随 X 呈周期变化的纹波项, 空间周期为NFC节距 p ; ε_{num} 为离散采样/插值带来的数值误差。

由前面分析可知, 强迫振动法在计算等效阻尼时默认: 两次穿越点除速度方向相反外, 其他影响因素(尤其是相位 X 引起的纹波项) 应当能在差分过程中相互抵消。然而, 在SC-NFC-EDS系统中, 两次取样点往往对应不同的里程相位 ($X_1 \neq X_2$), 导致纹波项在力差中仍有残留。

将力差按阻尼项展开如下:

$$\tilde{F}_x \left(\frac{(2k+1)\pi}{\omega} \right) - \tilde{F}_x \left(\frac{2k\pi}{\omega} \right) \approx 2c_x v_{\text{pos}} + (F_{\text{rip}}(X_2) - F_{\text{rip}}(X_1)) + \Delta\varepsilon \quad (23)$$

式中: $\tilde{F}_x$ 表示用于差分计算的目标自由度方向电磁力; c_x 为目标自由度上的等效阻尼; v_{pos} 为过零点处的速度幅值; $F_{\text{rip}}(X_1)$ 和 $F_{\text{rip}}(X_2)$ 分别表示两次过零采样点对应里程位置 X_1 和 X_2 处的电磁力纹波分量; $\Delta\varepsilon$ 为两次采样、插值及数值计算误差之差。

根据上述分析, 估计误差 $\Delta\varepsilon$ 可近似表示为

$$\Delta\varepsilon \approx \frac{F_{\text{rip}}(X_2) - F_{\text{rip}}(X_1)}{2A\omega} \quad (24)$$

当 A 或 ω 过小时, 分母取值减小, 有限幅值的纹波差被放大, 从而导致等效参数出现突变。

对于刚度项, 同理可得

$$\tilde{F}_x \left(\frac{(2k+3)\pi}{\omega} \right) - \tilde{F}_x \left(\frac{(2k+1)\pi}{\omega} \right) \approx -2k_x A + (F_{\text{rip}}(X_a) - F_{\text{rip}}(X_b)) + \Delta\varepsilon \quad (25)$$

$$\Delta k \approx \frac{F_{\text{rip}}(X_a) - F_{\text{rip}}(X_b)}{2A} \quad (26)$$

式中: k_x 为目标自由度上的等效刚度; X_a 和 X_b 分别表示相邻两个位移极值采样点对应的里程位置; $F_{\text{rip}}(X_a)$ 和 $F_{\text{rip}}(X_b)$ 分别为这两个里程位置处的电磁力纹波分量。

根据上述分析可知, 在SC-NFC-EDS系统中必须处理 $F_{\text{rip}}(X)$ 的相位失配问题。

2.3 相位匹配与参数选取

本节在传统强迫振动法的基础上引入相位匹配策略, 并根据速度变化选取不同的工作点 x_{eq} 、不同激励频率 f 、不同激励幅值 A 进行计算, 从而获得稳定可信的等效特征参数。

1) 相位匹配

研究团队采用相位匹配的配对策略, 记振动相位为 $\varphi(t) = \omega t$, 并去除原始时程中的初始瞬态部分, 提取过零点(速度极值点)和极值点(位移极值点)两类关键点。由于实际数据为离散采样, 极值点与过零点未必恰好落在采样时刻。研究团队依据振动相位将关键点分别归类至过零点所对应的两个组别, 进而对相邻半周期内的两组点进行配对, 得到一组配对点, 记为 $\{(t_k^+, t_k^-)\}$, 其中 $\varphi(t_k^-) \approx \varphi(t_k^+) + \pi$ 。

仅满足周期配对尚不足以有效抵消纹波项, 还需保证配对点间的里程相位尽可能一致。由于撬车匀速运行时 $X(t) = X_0 + vt$, 可将轨道相位定义为

$$\theta_x(t) = 2\pi \frac{X(t)}{L_p} \pmod{2\pi} \quad (27)$$

式中: $X(t)$ 为撬车沿轨道方向的纵向里程位置; L_p 为NFC节距。

在形成半周期对后, 进一步筛选满足 $|\theta_x(t_k^+) - \theta_x(t_k^-)| \leq \varepsilon_x$ 的配对点。当阈值 ε_x 取值较小时, 配对点在

轨道相位上高度一致,由此产生的纹波差分残留将显著降低。

经过上述配对处理,对每个可用配对点(t_k^+, t_k^-),在工作点线性化近似下,电磁力可写为

$$F_x(t) \approx \bar{F}_x + k(h(t) - h_0) + c\dot{h}(t) + F_{\text{rip}}(X(t)) \quad (28)$$

式中: k 和 c 分别为工作点附近的局部等效刚度和等效阻尼; $h(t)$ 为目标自由度位移; h_0 为对应工作点位移; $\dot{h}(t)$ 为目标自由度速度。

在过零点($h=h_0$)和极值点($\dot{h}=0$)处分别进行差分,即可得到式(3)、式(4)所示的等效阻尼与等效刚度表达式。

2) 随速度变化的 A 、 f 、 x_{eq} 选取准则

除纹波因素外,导致强迫振动法对 A 、 f 、 x_{eq} 敏感的另一个原因在于:当工作点 x_{eq} 偏离真实平衡位置时,实际线性化的力学区间围绕偏置点展开,从而使局部斜率(等效刚度/等效阻尼)发生系统性偏移,这会导致估计得到的等效刚度和等效阻尼随速度出现突变,且改变 A/f 的取值时,所得到的 k 与 c 结果亦不相同。因此,对SC-NFC-EDS系统, x_{eq} 不应取为固定参数,而应通过受力平衡进行求解;否则,平衡点漂移误差将与纹波误差叠加,进一步加剧强迫振动法的不稳定性。

本节提出的改进强迫振动法中,不同速度下计算特征参数时的参数选取遵循如下方法:

① 工作点 x_{eq} 的选取方法。由该速度点下的稳态响应提取,取电磁力平均项与重力相平衡的位置作为线性化中心,由此可确保差分围绕真实平衡点附近展开,避免因工作点偏置引入系统性漂移。

② 激励频率 f 的选取方法。为保证在有限仿真时间内形成足够多的有效周期配对,同时避免频率过高带来显著的相位误差与插值误差,本文在每个速度点选择使振动周期与采样步长匹配较好的频率区间,并确保可用配对数量满足统计稳定性要求。

③ 激励幅值 A 的选取方法。 A 幅值过小会使得特征参数计算中的分母过小,从而放大残余纹波, A 幅值过大则会超出线性化区间,引入 k 、 c 参数的非线性特性。本文在保证线性化有效的前提下,对 A 设置上下限,并允许其随速度变化,以兼顾不同速度点下的力幅与纹波强度差异。

通过上述相位匹配与参数自治选取方法,强迫振动法在SC-NFC-EDS系统中提取的特征参数计算结果随速度的变化更加连续且可重复。分别在仅改变激励幅值 A (固定 $f=2$ Hz)、仅改变激励频率 f (固定 $A=0.01$)、仅改变工作点 x_{eq} 的条件下,对比了采用固定参数方法与采用本文改进方法的计算结果,具体如图7所示。结果表明:在传统固定参数设置下,不同 A 、 f 、 x_{eq} 组合所得的等效参数曲线差异较大,部分速度点存在明显突变;而采用本文方法后,不同速度点下的等效参数曲线更加连续,且不同激励参数设置下的

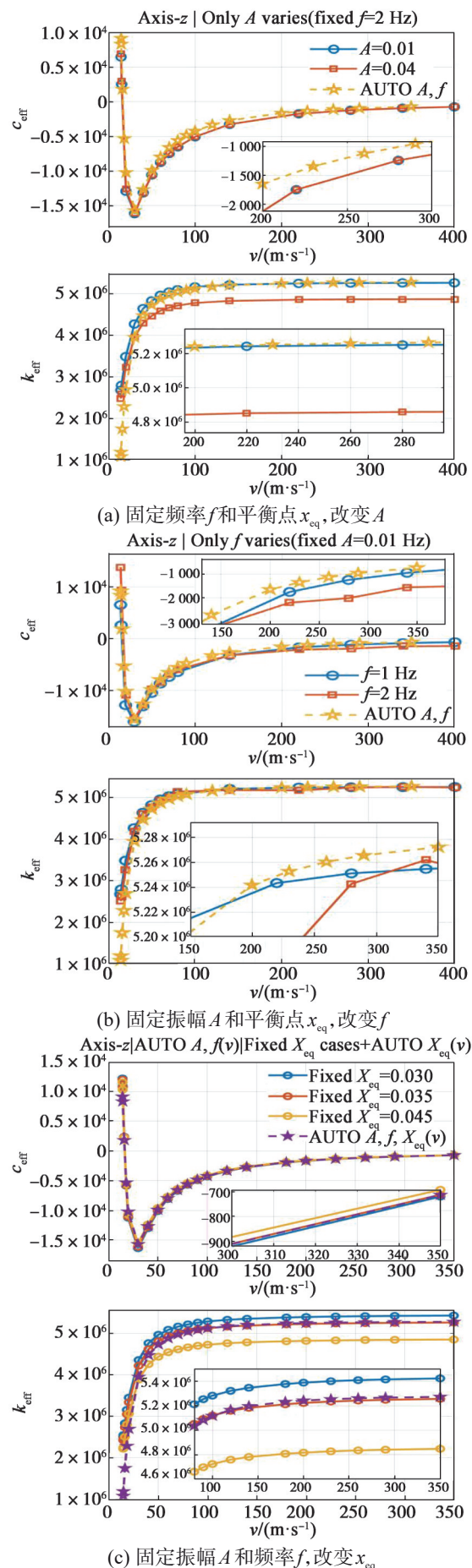


图7 固定参数和变参数的特征参数随速度变化曲线
Fig. 7 Speed-dependent variations in characteristic parameters under fixed and varying parameter conditions

结果具有唯一性。综上, 采用本文方法能够有效提升动态电路模型下单自由度局部等效参数提取的稳定性、可重复性及一致性。

3 结论和结束语

针对传统强迫振动法在提取 SC-NFC-EDS 系统单自由度局部等效参数时存在的计算结果不唯一及突变问题, 本文提出了一种基于里程相位匹配的改进强迫振动法。通过系统比较不同速度点、不同激励幅值、不同激励频率和不同工作点条件下的等效参数辨识结果, 得到以下主要结论:

① 在 SC-NFC-EDS 系统中, 传统强迫振动法计算等效刚度和等效阻尼参数时, 参数 A 、 f 、 x_{eq} 选取对计算结果影响较大, 固定选取不同的 A 、 f 、 x_{eq} 参数将导致计算结果存在差异, 难以保证一致性。

② 本文提出的里程相位匹配策略可有效抑制强迫振动法的计算偏差, 显著减轻等效参数随工况变化的突变现象。

③ 改进的强迫振动法通过里程相位匹配和随速度更新选取参数 A 、 f 、 x_{eq} , 实现了特征参数结果的唯一性, 从而为 SC-NFC-EDS 系统的稳定性评估、结构参数设计提供了更为可靠的等效参数依据。

需要指出的是, 本文计算所得的等效刚度和等效阻尼主要反映了目标自由度在约束其余自由度条件下的局部电磁响应特性。在实际电磁机车系统中, 垂向-俯仰-横向-侧滚及偏航等自由度间存在复杂的交叉耦合效应, 单自由度等效参数难以完整表征系统的多自由度耦合动力学行为。因此, 后续研究可在本文里程相位匹配思想的基础上, 将强迫振动法从单输入、单输出参数计算进一步拓展为多输入、多输出等效矩阵计算, 建立电磁力/力矩增量与位移、速度增量之间的矩阵关系, 进而获得包含非对角耦合项的等效参数矩阵, 为 SC-NFC-EDS 系统多自由度耦合特性分析提供更全面的参数基础。

参考文献:

- [1] LI H D, ZHENG J, HUANG H, et al. A partition-computing mechatronics dynamics modeling for superconducting electrodynamic suspension and the analysis on the discrete-track irregularity[J]. IEEE transactions on transportation electrification, 2025, 11(1): 1901-1914.
- [2] 胡道宇, 冯馨月, 马逊, 等. 基于场-路-运动耦合模型的超导电动悬浮系统垂向振动抑制方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2023, 43(10): 3972-3985.
HU Daoyu, FENG Xinyue, MA Xun, et al. Vertical vibration suppression methods of superconducting electrodynamic suspension system with a field-circuit-motion model[J]. Proceedings of the CSEE, 2023, 43(10): 3972-3985.
- [3] TAN Y Q, ZHOU D F, QU M H, et al. A novel vertical active damping system for the superconducting electrodynamic suspension[J]. IEEE transactions on intelligent transportation systems, 2024, 25(11): 17702-17717.
- [4] 周丹峰, 朱鹏翔, 谭亦秋, 等. 超导电动悬浮系统的垂向阻尼及其增强措施[J]. 国防科技大学学报, 2025, 47(5): 165-174.
ZHOU Danfeng, ZHU Pengxiang, TAN Yiqiu, et al. Vertical damping of the superconducting electrodynamic suspension system and its improving measure[J]. Journal of national university of defense technology, 2025, 47(5): 165-174.
- [5] TAN Y Q, ZHOU D F, LI J, et al. Dynamic simulation analysis of null-flux coil superconducting electrodynamic suspension system[J]. IEEE transactions on intelligent vehicles, 2024, 9(1): 1005-1016.
- [6] 王林凯, 刘志文, 陈政清. 桥梁断面颤振导数的分状态多频强迫振动识别[J]. 振动与冲击, 2018, 37(20): 15-23.
WANG Linkai, LIU Zhiwen, CHEN Zhengqing. Identification of flutter derivatives of bridge deck sections by step-by-step forced vibration with multi frequencies[J]. Journal of vibration and shock, 2018, 37(20): 15-23.
- [7] 曾斯华, 张文飞. 应用强迫振动法分析桥梁主体结构船撞效应的实例[J]. 江西交通科技, 2022(4): 107-110.
ZENG Sihua, ZHANG Wenfei. An example of applying forced vibration method to analyze the ship collision effect of bridge main structure[J]. Jiangxi transportation science and technology, 2022(4): 107-110.
- [8] 胡道宇, 冯馨月, 张志华. 超导电动悬浮系统阻尼特性研究[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(13): 4679-4687.
HU Daoyu, FENG Xinyue, ZHANG Zhihua. Study on the damping characteristics of superconducting electrodynamic suspension system[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(13): 4679-4687.
- [9] HE J L, ROTE D M. Computer model simulation of null-flux magnetic suspension and guidance: ANL/CP-73256[R]. IL United States: Argonne National Lab., 1992.
- [10] HE J L, ROTE D M, COFFEY H T. Study of Japanese electrodynamic-suspension maglev systems: ANL/ESD-20[R]. IL United States: Argonne National Lab., 1994.
- [11] LI H D, ZHU H L, HUANG H, et al. A new suppression strategy of pitching vibration based on the magnetic-electric-mechanical coupling dynamic model for superconducting EDS transport system[J]. Mechanical systems and signal processing, 2023, 188: 110039.
- [12] 王志涛, 蔡尧, 龚天勇, 等. 基于场-路-运动耦合模型的超导电动悬浮列车特性研究[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(4): 1162-1171.
WANG Zhitao, CAI Yao, GONG Tianyong, et al. Research on the characteristics of superconducting electric suspended trains based on field road motion coupling model [J]. Chinese journal of electrical engineering, 2019, 39 (4):

1162-1171.

[13] Fujimoto T, Aiba M, Suzuki H, et al. Characteristics of electromagnetic force of ground coil for levitation and guidance at the Yamanashi maglev test line[J]. Quarterly report of RTRI, 2000, 41(2): 63-67.

Research on a forced vibration method for calculating equivalent parameters of superconducting electrodynamic suspension systems

SU Xiaolei¹, LIU Yaozong^{1,2,3}, XIONG Dengyu¹, ZENG Qijin¹

- (1. College of Intelligence Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China;
2. Hunan Provincial Key Laboratory of Electromagnetic Levitation and Propulsion Technology, Changsha, Hunan 410073, China;
3. Engineering Research Center of Railway Industry on High-speed Maglev Technology and Equipment, Qingdao, Shandong 266111, China)

Abstract: Superconducting electrodynamic suspension (EDS) systems generate levitation and guidance through interactions between the onboard superconducting coils and ground null-flux coils. These systems exhibit strongly nonlinear, coupled mechanical-electrical-magnetic characteristics, so their dynamic behaviors are characterized and evaluated using characteristic parameters such as equivalent stiffness, equivalent damping, and natural frequency, obtained by modeling the systems as equivalent linear oscillators around selected working points. The forced vibration method is widely used to identify these equivalent parameters; however, its application to EDS systems often produces abnormal speed-dependent variations and pronounced sensitivity to excitation parameters, resulting in reduced accuracy and poor repeatability. To address this, leveraging a field-circuit-motion coupled simulation model, this study explored how electromagnetic-force ripples induced by discretely distributed ground null-flux coils and the choice of excitation parameters and working points affect the calculated equivalent parameters. Based on this analysis, an improved forced vibration method is proposed. Simulation results demonstrate that the improved forced vibration method effectively suppresses abrupt speed-dependent variations in the equivalent parameters and yields more stable and repeatable calculation results. These findings provide a reference for extracting local linearization characteristic parameters and for the characteristic analysis of such systems.

Keywords: superconducting electrodynamic suspension (EDS); equivalent stiffness/damping; forced vibration method; levitation force fluctuation; phase matching